理系のビリヤード 1：スロウって何？ いえいえ，その前に

2013 年 7 月 25 日

1　手玉と的玉は 90° に割れる（ほんとうは割れないけどね）

大きさのある 2 つの物体が衝突すると，さまざまな方向へ「はね返り」がおこる。ビリヤードは，まさにこの「はね返り」をつかった遊びだ。日常生活における経験から，我々は「はね返り」についていろいろな規則を知っている。たとえば，床に（自然に）落としたボールが，落とした高さ以上には跳ね上がらないことを我々は知っている。そこで，弾んで戻ってくるボールを受けとめようとすれば，自然と中腰になってボールをキャッチする。また，野球ボールの壁当てでは，はね返ってくるボールの方向は，投げた角度からだいたい予想できる。このような経験があるからこそ，はじめてビリヤードをやる場合でも，「玉の動きが全く予想もつかない」などということは，おそらくない[*1]。

ポケットビリヤードは的玉をポケットに入れるゲームだから，ねらいを定めて手玉をキューで撞（つ）く。基本的なねらい方はあまり難しくない。まずは，的玉とポケットを結ぶ直線をイメージする。この直線上で，的玉の手前側，つまりポケットと反対側に並ぶようなボールをイメージし，手玉をそこに運ぶように撞けばよい。このイメージしたボールを「イメージボール」という。手玉を自由における場合（これを「フリーボール」という），図 1 の A の位置に手玉をおき，的玉，そしてその向こうに見えるポケットをねらってズドンと撞けば，的玉はポケットに入る。手玉が A の位置になければ的玉をポケットに入れることができないかと言うと，そうではない。的玉の進む方向は，手玉が衝突した瞬間に決まる。というのも，手玉

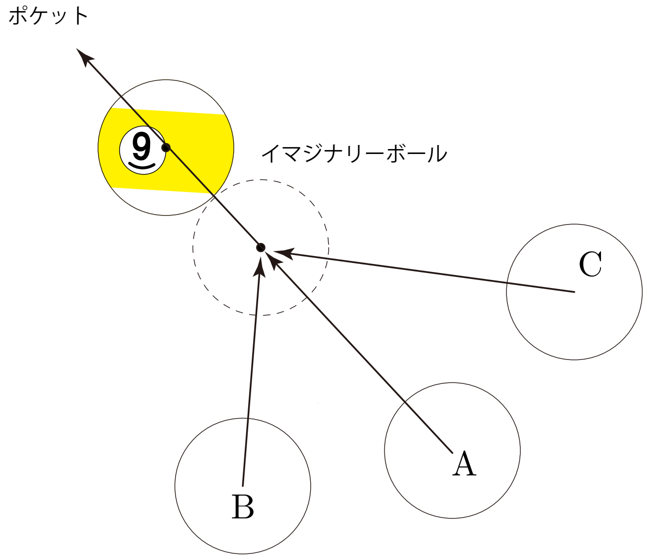

図 1　的玉のねらい方：イメージボール

*1　玉を撞いた瞬間，思いもよらぬ明後日の方向へ飛んでいってしまうことはよくある。

が的玉に衝突したあと，的玉は「手玉の中心」と「的玉の中心」をむすぶ直線方向にすすむ。ということは，手玉の位置に関係なく，どこからねらっても正しいイメージボールの位置に手玉を運べば（撞けば），的玉はポケットに入る。

的玉が入れば，次の的玉をねらうことになる。毎回フリーボールであれば，ポケット – 的玉 – 手玉が一直線になるようにするのがよい。しかし，それではゲームにならない。的玉を 1 つポケットしたら，手玉はその位置のままで次の的玉をねらうのがビリヤードだ。いま，手玉はどこにあるだろうか。もちろん，さきほど入れたときに手玉がどちらの方向に「はね返る」かで今の手玉の位置が決まる。これは，**「手玉と的玉は 90° に割れる」**と憶えておけばよい。この「手玉の動き」を考慮すれば，次の的玉を入れやすいように最初の手玉の位置を選ぶことになる。つまり，次の的玉のことを考えれば，「手玉と的玉がポケットへ一直線」というのが最善の策でないことは容易に想像がつく。これを「フリをつける」という。

さて，本題であるが，**じつは「手玉と的玉は 90° に割れる」というのは，ある理想的な状況でしか成り立たない。**これは，最近では雑誌 CUE'S で須藤路久氏が強調しているように，「スロウ」に原因がある。ビリヤードの上達にはスロウの理解は必須であるが，そのまえに，「なぜ手玉と的玉は **90°** に割れるのか？」へ答えを準備しておこう。

2　衝突

剛体球が無回転状態で衝突する場合を考える。質量 m_1 の剛体球（手玉）が速度 $\boldsymbol{u}$ で質量 m_2 の剛体球（的玉）に衝突するとしよう。ただし，問題の簡単化のため的玉は静止し

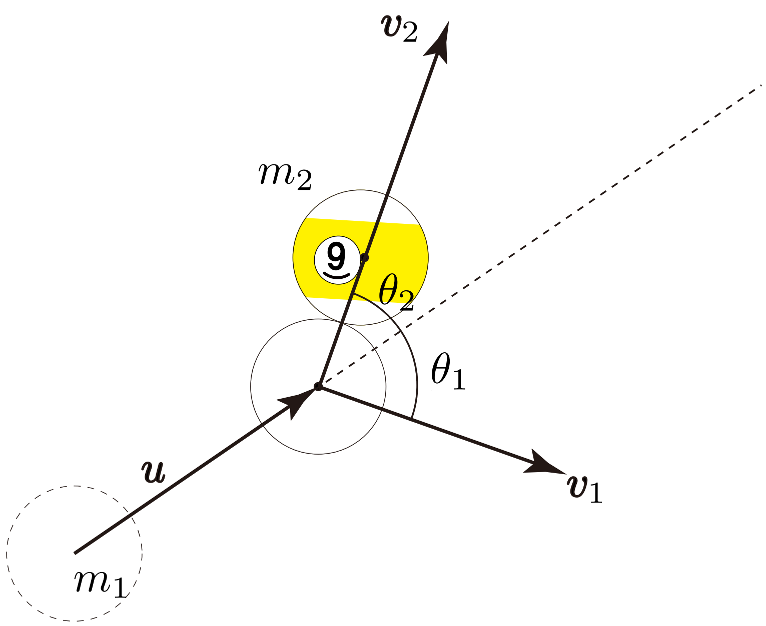

図 2　平面上での剛体球の衝突

ているとする[*2]。衝突前後の運動量の保存則より次の 2 式が成立する。

$$m_1\boldsymbol{u} = m_1\boldsymbol{v}_1\cos\theta_1 + m_2\boldsymbol{v}_2\cos\theta_2 \qquad x \text{ 方向の運動量保存の法則} \tag{1}$$

$$0 = m_1\boldsymbol{v}_1\sin\theta_1 - m_2\boldsymbol{v}_2\sin\theta_2 \qquad y \text{ 方向の運動量保存の法則} \tag{2}$$

ただし，手玉の進行方向を x 方向とし，それに垂直に y 方向をとった。これとは別にエネルギーの保存則より，

$$\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{u}_1^2 = \frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2^2 \tag{3}$$

が成り立つ。ここで，手玉の質量と的玉の質量が等しいとおこう。すなわち，

$$m_1 = m_2 \tag{4}$$

である。こうすると，上の 3 式は全て m_1 で割ることができ，次のように（もっと）簡単になる。

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1\cos\theta_1 + \boldsymbol{v}_2\cos\theta_2 \tag{5}$$

$$0 = \boldsymbol{v}_1\sin\theta_1 - \boldsymbol{v}_2\sin\theta_2 \tag{6}$$

$$\boldsymbol{u}_1^2 = \boldsymbol{v}_1^2 + \boldsymbol{v}_2^2 \tag{7}$$

これを解くのは決して難しくはないが，丁寧に示すとだらだらと長くなる。そこで先に結論を言えば，この 3 式より $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ が得られる。すなわち，手玉と的玉が衝突すると，これらは $\pi/2 = 90^\circ$ に分離して進むことが証明される。これらは，以下のようにまとめることができる。

手玉と的玉が 90° に割れる条件

- 手玉と的玉が 90° に割れるのは，
  1. 手玉と的玉の質量が等しく，
  2. 無回転衝突で，
  3. 運動量保存の法則が成り立ち，
  4. エネルギー保存の法則が成り立っている

  という条件がそろった場合に限る。

次頁の「解法」をみればわかるように，(7) 式の等号を不等号に変えて，$\boldsymbol{u}_1^2 > \boldsymbol{v}_1^2 + \boldsymbol{v}_2^2$ とすると，$\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$ を得る。すなわち，（何らかの原因で）エネルギー保存則が成り立たないとすると，分離角は 90° よりも小さくなる。これはまさに，スロウである。

[*2] 的玉が動いているうちに手玉を撞くのはファールとなる（しかも，多くの場合あまりメリットはない）。

2.1　解法

まずは，(6) 式を次のように変形する。

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} \tag{8}$$

(8) 式を (5) 式に代入すると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{v}_2 \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\cos\theta_1 + \boldsymbol{v}_2\cos\theta_2 \\ &= \boldsymbol{v}_2 \left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right) \end{aligned} \tag{9}$$

を得る。あとは，(8) 式と (9) 式を (7) 式に代入して以下のように変形すればよい。

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_2^2 \left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)^2 = \left(\boldsymbol{v}_2 \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\right)^2 + \boldsymbol{v}_2^2 \\
&\left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)^2 = \left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\right)^2 + 1 && \text{両辺を}\boldsymbol{v}_2^2\text{で割った} \\
&\left(\frac{\sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1}{\sin\theta_1}\right)^2 = \left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_1}\right)^2 && \text{両辺を} \sin^2\theta_1\text{で通分した} \\
&(\sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1)^2 = \sin^2\theta_2 + \sin^2\theta_1 && \text{両辺に} \sin^2\theta_1\text{をかけた} \\
&\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2\sin^2\theta_1 \\
&\qquad + 2\sin\theta_2\sin\theta_1\cos\theta_1\cos\theta_2 = \sin^2\theta_2 + \sin^2\theta_1 && \text{左辺の}(\quad)^2\text{を展開した} \\
&\sin^2\theta_1 \underbrace{(\cos^2\theta_2 - 1)}_{-\sin^2\theta_2} + \sin^2\theta_2 \underbrace{(\cos^2\theta_1 - 1)}_{-\sin^2\theta_1} \\
&\qquad\qquad + 2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_1\cos\theta_2 = 0 && \text{整理した} \\
&-\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_2\sin^2\theta_1 \\
&\qquad\qquad + 2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_1\cos\theta_2 = 0 && \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\ \text{より} \\
&-2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 + 2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_1\cos\theta_2 = 0 && \text{整理した} \\
&-\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 = 0 && \sin\theta_1\sin\theta_2\text{で割った} \\
&-\frac{\cos(\theta_1-\theta_2) - \cos(\theta_1+\theta_2)}{2} \\
&\qquad\qquad + \frac{\cos(\theta_1-\theta_2) + \cos(\theta_1+\theta_2)}{2} = 0 && \text{三角関数の和積公式}^{*3}\text{より} \\
&\cos(\theta_1+\theta_2) = 0 && \text{整理した} \\
&\qquad\qquad \xrightarrow{\text{これよりただちに}} \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned} \tag{10}$$

---

*3　$\sin A \sin B = (\cos(A-B) - \cos(A+B))/2$，$\cos A \cos B = (\cos(A-B) + \cos(A+B))/2$